

Übungen zur Funktionentheorie
Blatt 4

1. Sei $a \in \mathbb{C}$ beliebig, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\log : D \rightarrow \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus. Man definiert den zugehörigen Zweig der a -ten Potenz durch

$$\text{pot}_a : D \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \exp(a \log(z)) =: z^a.$$

- a) Berechnen Sie alle möglichen Werte von i^i , 2^{-i} und $(-1)^{\sqrt{i}}$.
- b) Zeigen Sie: Ist $a = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{C}^*$, $\log : D \rightarrow \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus, und $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $g(z)^n = z$, für alle $z \in D$, dann existiert eine n -te Einheitswurzel ω , so dass $g(z) = \omega \exp(\frac{1}{n} \log z)$ für jedes $z \in D$.
2. a) Zeigen Sie, dass die Einheiten im formalen Potenzreihenring $\mathbb{C}[[X]]$ genau aus den Potenzreihen $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_0 \neq 0$ bestehen. Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten von f^{-1} an.
- b) Zeigen Sie: Hat $f \in \mathbb{C}[[x]]^*$ positiven Konvergenzradius, so auch f^{-1} .
3. Berechnen Sie mit Hilfe von Cauchy's Integralformel die Integrale

$$\int_{|z+2i|=3} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} dz, \quad \int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z^2 - 1)(z - 1)^2}.$$

4. Sei $f(z)$ eine ganze Funktion. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien M, r positive reelle Zahlen, so dass

$$|f(z)| \leq M|z|^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$. Zeigen Sie, dass $f(z)$ ein Polynom ist, dessen Grad höchstens n ist.

5. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $p \in D$. Zeigen Sie: ist $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f^{(k)}(p) = 0$ für alle $k \geq 1$, dann ist f konstant.

Abgabe: Freitag, den 19.5.2006, 12:00 in das Tutorenfach oder in der Vorlesung.